Leçon 1 :Fonction de production

MESSAN Mabéa Fulgence

06-06-2017
1.0

Table des matières

Objectifs

- Spécifier la fonction de production d'une entreprise ;
- Mesurer la productivité de l'entreprise ;
- Évaluer la performance de l'entreprise à travers les rendements factoriels et d'échelle.

Caractérisation de la fonction de production

I

Qu'est-ce que la production (output)?

La production est l'opération qui consiste à transformer par le travail des biens et services existants en d'autres biens et services.

Quels sont les facteurs de production (inputs)?

Les facteurs de production désignent l'ensemble des biens et services dont l'utilisation contribue à la réalisation de la production.

- Le travail, i.e. l'ensemble des ressources humaines (facteurs primaires)
- Le capital, i.e. terrains, bâtiments, équipement et les consommations intermédiaires

Facteurs de production fixes ou variables

- **Un facteur de production fixe est un facteur dont la quantité ne peut être changée pendant la période de temps étudiée.** i.e. terrains, bâtiments, équipement. Les facteurs fixes sont des paramètres dont les valeurs dépendent des décisions prises dans le passé.
- **Un facteur de production variable est un facteur dont la quantité peut être modifiée durant cette période.** i.e. matières premières, l'énergie, la main-d'œuvre.

La ligne de démarcation entre les facteurs fixes et les facteurs variables dépend de la période de temps pendant laquelle on décrit le fonctionnement de l'entreprise : À court terme il existe des facteurs fixes et des facteurs variables. À long terme, tous les facteurs sont variables.

Facteurs de production substituables ou complémentaires

Les facteurs peuvent être combinés dans des proportions variables pour obtenir une production donnée. Ils sont dans ce cas substituables (exemple Travail et Capital).

Deux facteurs sont substituables lorsqu'il est possible de remplacer une quantité donnée de l'un des facteurs par une quantité supplémentaire de l'autre facteur, tout en maintenant à l'identique le volume de la production.

Les facteurs peuvent être combinés dans des proportions fixes pour obtenir une production donnée. Ils sont dans ce cas complémentaires.

La fonction de production exprime le lien qui existe entre les facteurs de production et la quantité produite.

$$Q = f(K,L)$$

- La fonction de production décrit la relation mathématique entre la quantité produite d'un bien et les quantités des différents facteurs nécessaires à sa fabrication.
- La fonction de production décrit ce qui est techniquement réalisable si la firme utilise de manière efficace ses facteurs de production. Elle résume l'ensemble des contraintes techniques qui s'imposent à l'entreprise.

1. Formulation générale d'une fonction de production

Soient :

$z_1, z_2, \ldots, z_m$ les facteurs de productions variables z_{m+1}, z_{m+2}, z_{m+l} : les facteurs de productions fixes

Les quantités de facteurs z_h varient ce manière continue ($z_h \in R^+$)

y : la fonctions de production

$y= f(z_1, z_2, \ldots, z_m, z_{m+1}, z_{m+2}, \ldots, z_{m+l})$

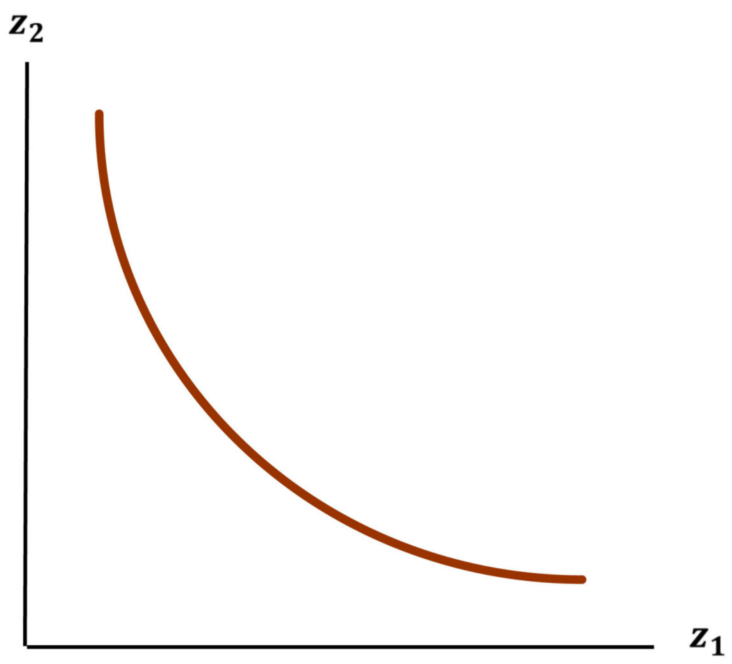
$\forall y \in R^{m+l}$

2. Représentation graphique de la fonction de production et typologie des isoquantes

La fonction de production est représentée graphiquement par une isoquante.

- Chaque isoquante est associée à un niveau de production donné. Plus le niveau de production est élevé, plus l'isoquante correspondante est éloignée de l'origine.
- L'isoquante est monotone décroissante. Deux isoquantes ne peuvent se couper.
- L'isoquante épouse en règle générale une forme convexe. Ceci est équivalent à la convexité de l'ensemble des vecteurs de facteurs de production qui fournissent un volume de production supérieur ou égal à une certaine quantité.
- La forme de l'isoquante traduit le caractère substituable ou complémentaire des facteurs de production.

On appelle **isoquante** un ensemble de vecteur de facteurs de production ($z=z_1,z_2,\ldots,z_n$) qui conduisent au même niveau de production (y)



Typologie des isoquantes

Isoquant linéaire

Elle représente la courbe d'indifférence du producteur lorsque les facteurs de production sont parfaitement substituables. Dans ce cas, la fonction de production C.E.S est linéaire.

$$y = f(z_1, z_2) = \left(az_1^\rho + bz_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

Pour p=1, la fonction de production C.E.S est linéaire

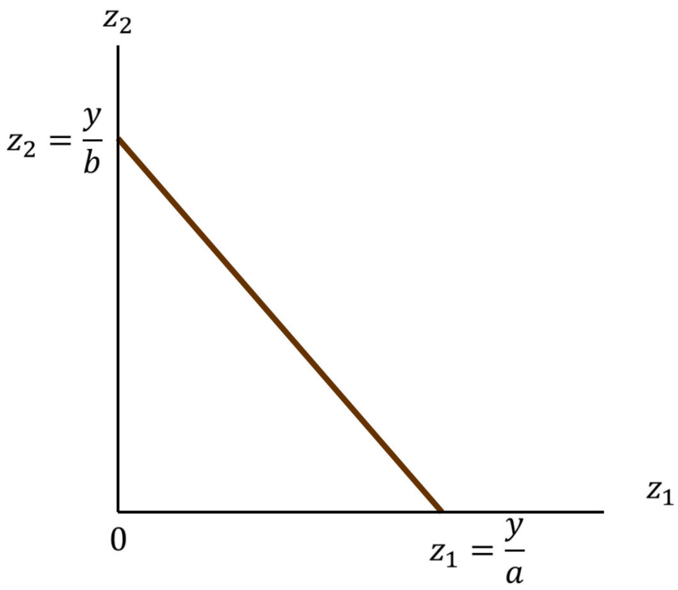
$y=f(z_1 z_2)=(az_1+bz_2)$

L'équation de la courbe d'indifférence de la fonction linéaire est donnée par :

$$\boldsymbol{z_2 = \frac{y}{b} - \frac{a}{b} z_1}$$

Pour $z_1 = 0, z_2 = \frac{y}{b}$

Et pour $z_2 = 0, z_1 = \frac{y}{a}$



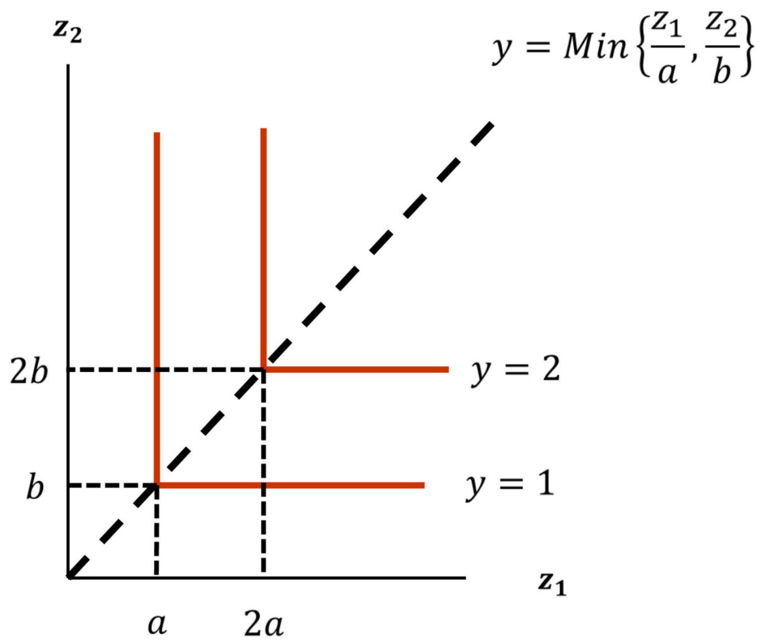
Isoquant Input-Output ou de Leontieff

Elle correspond à la situation dans laquelle les facteurs de production sont complémentaires.

$$\boldsymbol{y = Min\left\{\frac{z_1}{a}, \frac{z_2}{b}\right\}}$$

Les points d'équilibre sont obtenus si :

- $y = \frac{z_1}{a}, soit\ z_1 = ya$
  ou
- $y = \frac{z_2}{b}, soit\ z_2 = yb$



Isoquante convexe

Elle correspond à la situation dans laquelle les facteurs de production sont substituables.

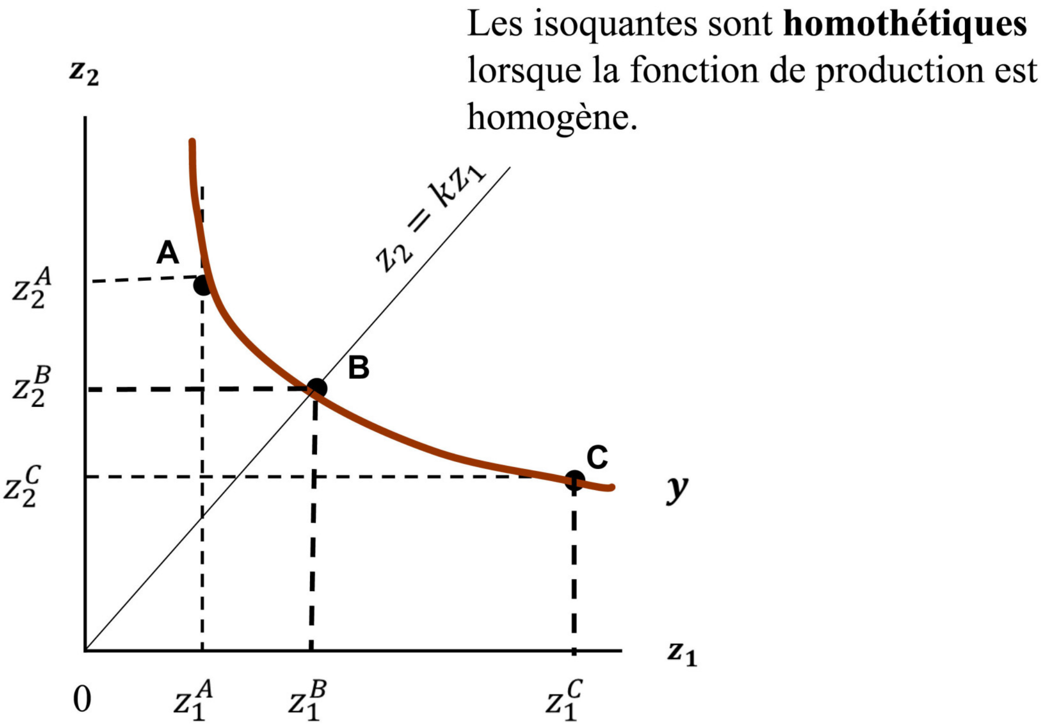
La technologie de production est illustrée par la fonction de production Cobb-Douglas :

Technologie généralisé de production :$\boldsymbol{y = Az_1^{\alpha} z_2^{\beta}}$

Technologie restrictive de production : $y = Az_1^{\alpha} z_2^{1-\alpha}$

Avec $0<\alpha<1$ et $\alpha+\beta=1$

L'équation de l'isoquante ($\boldsymbol{z_2^{\beta} = \frac{y}{Az_1^{\alpha}}}$) illustre l'expression mathématique d'une fonction hyperbolique de type$(y = \frac{a}{x})$.



Taux marginal de substitution technique (TMST)

Le taux marginal de substitution technique du facteur (k) au facteur (h) est égal à la quantité additionnelle de facteur (k) dont l'entreprise doit disposer pour remplacer une unité de facteur (h) tout en maintenant la production à un niveau inchangé.

Soit : $y= f(Z_1 ; Z_2 ;... ; Z_n)$

Supposons que seules (h et k) varient c'est-à-dire que : $dz_i = 0$ si $i \neq h$ et $i \neq k$

$$dy = \frac{\partial f}{\partial z_h} dz_h + \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k$$

pour *dy*=0

$$-\frac{dz_k}{dz_h} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z_h}}{\frac{\partial f}{\partial z_k}}$$

Pour de petites variations

$$-\frac{\Delta z_k}{\Delta z_h} \cong \frac{\frac{\partial f}{\partial z_h}}{\frac{\partial f}{\partial z_k}} = TMST_{k/h}$$

Le TMST est don égal au rapport des productivités marginales $\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial z_h}}{\frac{\partial f}{\partial z_k}}\right)$. Dans ce cas de deux facteurs de production z_1 et z_2 : $TMST_{z_2/z_1} = -\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\frac{\partial f}{\partial z_2}}$

Le TMST est égal à l'opposé de la pente de l'isoquante.

Par ailleurs, l'hypothèse de convexité des isoquantes est équivalente à la décroissance du TMST.

3. Typologie des fonctions de production

Fonction de production Cobb-Douglas

$y = az_1^{\alpha} z_2^{\beta}$ α>0, β>0

Vérification de l'hypothèse de décroissance des productivités marginales

conditions de 1er ordre

- $\frac{\partial f}{\partial z_1} = \alpha a z_1^{\alpha-1} z_2^{\beta}$
- $\frac{\partial f}{\partial z_2} = \beta a z_1^{\alpha} z_2^{\beta-1}$

conditions de 2nd ordre

- $\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} = \alpha(\alpha-1) a z_1^{\alpha-2} z_2^{\beta}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} = \beta(\beta-1) a z_1^{\alpha} z_2^{\beta-2}$

L'hypothèse de décroissance des productivités marginales implique que :

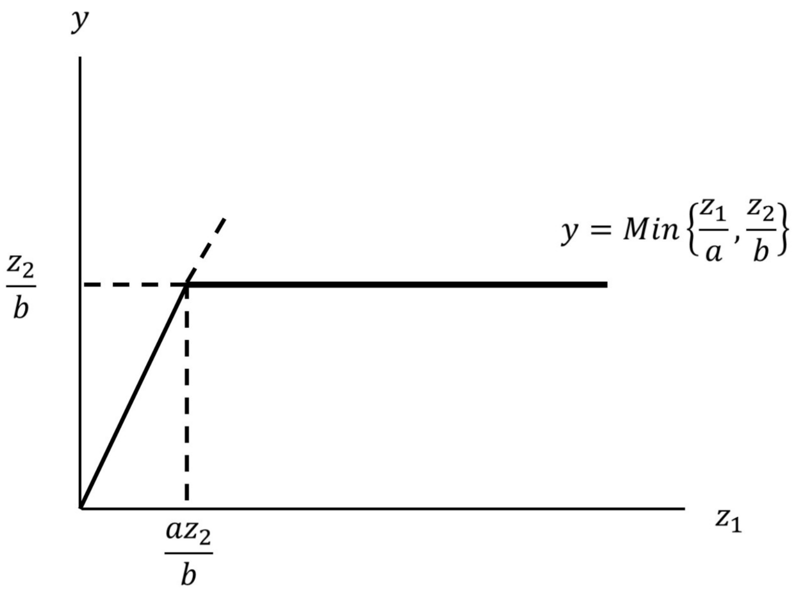
- $\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} < 0$

Et donc que α<1, β<1

Fonction de production à facteurs complémentaires

Elle illustre la fonction d production dans laquelle les facteurs de production sont complémentaires. La production de (y) unités de biens nécessite (ay) unités de (z_1) et (by) unités de (z_2) .

La fonction de production s'écrit : $y = f(z_1, z_2) = Min\left\{\frac{z_1}{a}, \frac{z_2}{b}\right\}$



Fonction de production à Élasticités de Substitution Constantes C.E.S

$$y = f(z_1, z_2) = \left(az_1^\rho + bz_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

avec a>0 et b>0, (ρ) pouvant être positif ou négatif

Vérification de l'hypothèse de décroissance des productivités marginales

conditions de 1^er^ ordre

- $\frac{\partial f}{\partial z_1} = a\left(a + b\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^\rho\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}}$
- $\frac{\partial f}{\partial z_2} = b\left(b + a\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^\rho\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}}$

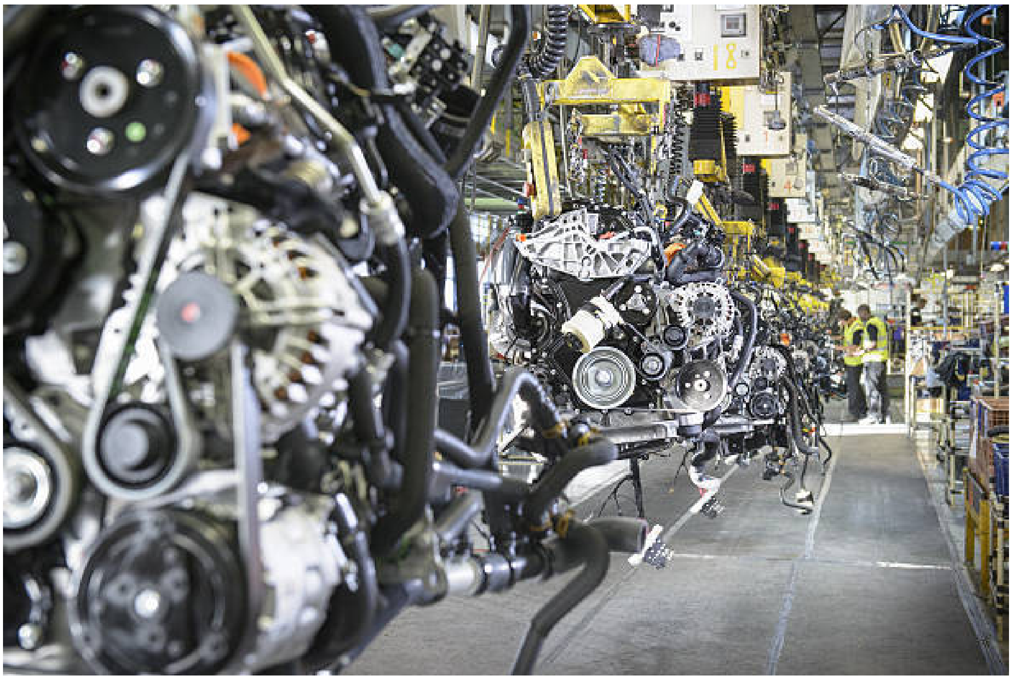
conditions de 2^nd^ ordre

- $\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} = ab(\rho - 1)z_1^{\rho-2}z_2^\rho\left(az_1^\rho + bz_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-2}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} = ab(\rho - 1)z_2^{\rho-2}z_1^\rho\left(az_1^\rho + bz_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-2}$

L'hypothèse de décroissance des productivités marginales impose que (ρ<1)

Fonction de production à court terme

II



Sachant que les facteurs fixes sont constants, on note :$\overline{z}_{m+1}, \overline{z}_{m+2}, \dots, \overline{z}_{m+l}$: Les facteurs de production fixes.

Les quantités de facteurs z_h varient de manière continue ($z_h \in \mathbb{R}^{+}$)

y : la fonction de production de court terme devient :

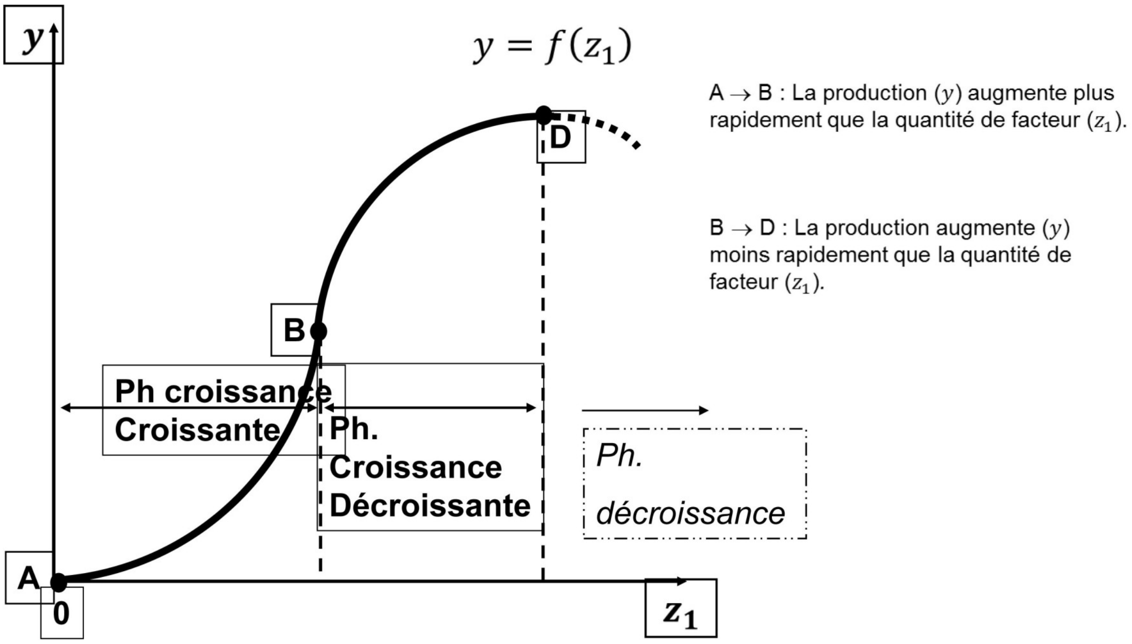
$$y = f(z_1, z_2, \dots, z_m, \overline{z}_{m+1}, \overline{z}_{m+2}, \dots, \overline{z}_{m+l})$$
$$y \in \mathbb{R}^{m+l}$$

A court terme n=m, on obtient que la fonction de production s'écrit : $\boldsymbol{y = f(z_1, z_2, \dots, z_n)}$ **et** $\boldsymbol{y \in \mathbb{R}^n}$

Lorsqu'on raisonne sur le court terme, il est intéressant de s'interroger sur la variation de la production qui résulte d'une augmentation du seul facteur variable de production.

1. Productivités totale, moyenne et marginale

La production totale (y) décrit l'évolution de la production en fonction de l'utilisation du facteur variable (z_1).



Productivités moyenne et marginale

$f(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ est la fonction de production

Productivité moyenne (P_h^M)

$$P_h^M(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{f(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{z_h}$$

Productivité marginale(P_h^m)

$$P_h^m(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{\partial f(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\partial z_h}$$

On calcule la dérivée partielle de la productivité moyenne

$$\frac{\partial P_h^M}{\partial z_h} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z_h} z_h - f(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{z_h^2} = \frac{P_h^m z_h - f(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{z_h^2}$$

On a donc

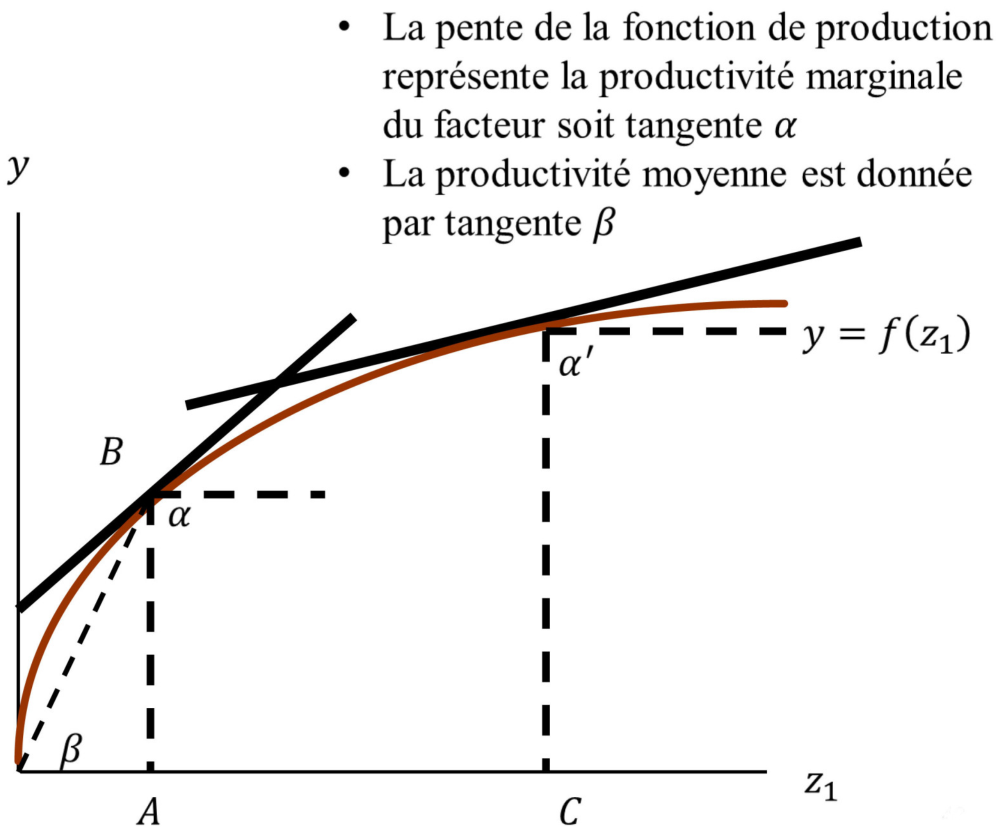
- $\frac{\partial P_h^M}{\partial z_h} > 0$ si $P_h^m z_h - f(z_1, z_2, \ldots, z_n) > 0$ en divisant par z_h on obtient $P_h^m > P_h^M$
- $\frac{\partial P_h^M}{\partial z_h} < 0$ si $P_h^m z_h - f(z_1, z_2, \ldots, z_n) < 0$en divisant par z_h on obtient $P_h^m < P_h^M$

2. Loi des rendements marginaux décroissants

Loi des rendements marginaux décroissants et concavité de la fonction de production

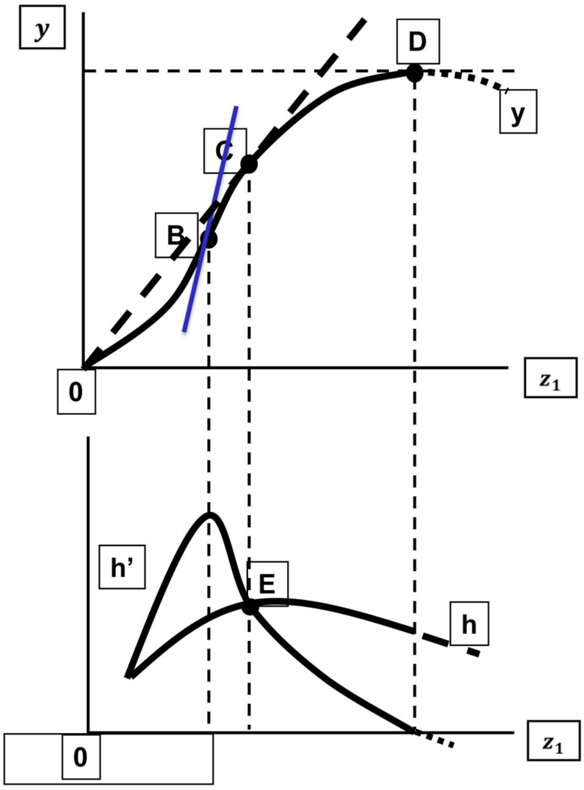
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial {z^2}_h} < 0$ illustre la loi de la productivité marginale d'un facteur lorsque la quantité utilisée de ce facteur augmente.

Les facteurs de production autres que (h) étant constant, ($\dfrac{\partial^2 f}{\partial {z^2}_h} < 0$) implique que la fonction de production (y) est croissante et concave.



Dans l'exemple, la productivité marginale du facteur est 1 est toujours décroissante. Elle est :

- toujours plus faible au point C qu'au point A car tangente α'<tangente α
- inférieure à la productivité moyenne car tangente α<tangente β



$y = f(z_1)$

Remarques:

1. $h = h'$ au point où h atteint son maximum
2. h' = 0 quand y atteint son Maximum
3. Si h' > h, alors h augmente
4. Si h' < h, alors h diminue
5. Si h' = h, alors Δ h =0
6. De 0 au point E: les rendements sont croissants: c'est la zone d'incitation.
7. Entre E et h'=0 : les rendements sont décroissants: zone rationnelle ou économique.
8. au-delà de h'=0: les rendements sont négatifs: zone non économique

Fonction de production à long terme

III

A long terme, tous les facteurs de production sont variables (n=m+1). Il est alors intéressant de s'interroger sur la **variation de la production qui résulte d'une augmentation de toutes les quantités de facteurs dans la même proportion**.

Le long terme est l'horizon de temps suffisamment long pour permettre à l'entreprise de changer les capacités de production.

1. Rendements d'échelle

Les rendements d'échelle sont une notion importante pour :

- appréhender les changements opérés dans la structure technologique de l'entreprise (intensité capitalistique) ;
- justifier qu'une seule entreprise puisse être responsable de la production d'un bien d'un type donné (cas des rendements d'échelle croissants).

Rendements d'échelle croissants

Plusieurs raisons peuvent justifier la croissance des rendements d'échelle :

- **Division technique du travail** (A. Smith) suivant laquelle **une échelle de production plus importante permet une meilleure spécialisation des tâches** dans l'entreprise.
- **Indivisibilité des équipements**
- **Caractéristiques des technologies**
- **Frais généraux** ne doivent pas être accrus lorsqu'on développe la production.

Rendements d'échelle décroissants

D'autres raisons justifient au contraire la décroissance des rendements d'échelle :

- Inefficacités résultant des lourdeurs bureaucratiques lorsque la taille de l'entreprise s'agrandit ou lorsqu'il n'y a pas suffisamment d'incitations.
- Gigantisme technologique ou les technologies mal appropriées

Soit un nombre quelconque (λ>1), les rendements d'échelle sont :

- Décroissants si :
  $f(\lambda z_1, \lambda z_2, ..., \lambda z_n) < \lambda f(z_1, z_2, ..., z_n)$
- Croissants si :
  $f(\lambda z_1, \lambda z_2, ..., \lambda z_n) > \lambda f(z_1, z_2, ..., z_n)$
- Constants si :
  $f(\lambda z_1, \lambda z_2, ..., \lambda z_n) = \lambda f(z_1, z_2, ..., z_n)$

On peut démontrer la nature du rendement d'échelle par le degré d'homogénéité de la fonction de production homogène.

Une fonction est homogène de degré(k) si

$f(\lambda z_1, \lambda z_2, \ldots, \lambda z_n) = \lambda f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ $k \in R^{+}_{*}$

- $\lambda^k > \lambda$, si $k>1$, Rendements d'échelle croissants
- $\lambda^k < \lambda$, si $k<1$,Rendements d'échelle décroissants
- $\lambda^k = \lambda$, si $k=1$,Rendements d'échelle constants

Rendements d'échelle sur la fonction de production Cobb-Douglas

$$f(\lambda z_1, \lambda z_2) = a(\lambda z_1)^{\alpha}(\lambda z_2)^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta} a z_1^{\alpha} z_2^{\beta}$$

$$\boldsymbol{f(\lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda^{\alpha+\beta} f(z_1, z_2)}$$

Pour tout scalaire (λ), la fonction de production Cobb-Douglas est homogène de degré ($\alpha+\beta$).

- $\alpha+\beta<1$, Rendements d'échelle décroissants
- $\alpha+\beta=1$,Rendements d'échelle constants
- $\alpha+\beta>1$,Rendements d'échelle croissants

Rendements d'échelle sur la fonction de production à facteurs complémentaires

$$f(\lambda z_1, \lambda z_2) = Min\left\{\frac{\lambda z_1}{a}, \frac{\lambda z_2}{b}\right\} = \lambda Min\left\{\frac{z_1}{a}, \frac{z_2}{b}\right\}$$

$f(\lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda f(z_1, z_2)$

Pour tout scalaire (λ), la fonction de productions à facteurs complémentaires est homogène de degré 1 et implique des rendements d'échelle constants.

Rendements d'échelle sur la fonction C.E.S.

$$f(\lambda z_1, \lambda z_2) = (a(\lambda z_1)^{\rho} + b(\lambda z_2)^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}$$

$$f(\lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda\left(a z_1^{\rho} + b z_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} = \lambda f(z_1, z_2)$$

$f(\lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda f(z_1, z_2)$

Pour tout scalaire (λ), la fonction de production C.E.S est homogène de degré 1 et implique des rendements d'échelle constants.