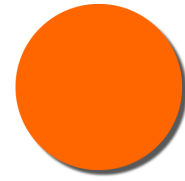


Leçon 2 : Optimisation sous contrainte

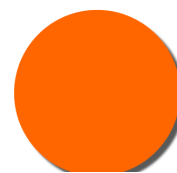
SOUMARE Mahamadou

Table des matières



| | |
|---|-----------|
| Introduction | 3 |
| I - Concepts généraux | 4 |
| II - Méthode de résolution par substitution | 5 |
| III - Méthode de Lagrange | 6 |
| IV - Optimisation sous la contrainte d'une fonction de n variables | 11 |
| V - Optimisation sous plusieurs contraintes | 12 |

Introduction



Une autre vision de l'optimisation est l'objet de notre étude dans cette leçon 2. C'est l'optimisation sous contrainte. Dans cette logique, les concepts généraux de l'optimisation sont exposés. De ces concepts, deux méthodes d'optimisation émergent, à l'instar de, la méthode de résolution par substitution et la méthode de Lagrange.

Concepts généraux



Soit f et g deux fonctions de deux variables définies sur un ensemble ouvert D inclus dans \mathbb{R}^2 .

On cherche à optimiser la fonction f sous la contrainte $g(x, y) = 0$; c'est – à – dire on cherche les extrema de F sur l'ensemble $C = \{(x, y) \in D ; g(x, y) = 0\}$

Par exemple, on dira que f admet en $(x_0, y_0) \in D$ un maximum local sous la contrainte

$g(x, y) = 0$, si $g(x_0, y_0) = 0$ et s'il existe un voisinage V de $s(x_0, y_0)$ tel que :

Pour tout $(x, y) \in V$, vérifiant $g(x, y) = 0$, on a $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$

Remarque

En général, les extrema de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$ (extrema liés) ne coïncident pas avec les extrema de f sans contrainte (extrema libres).

Méthode de résolution par substitution



Lorsque la contrainte $g(x, y) = 0$ permet d'exprimer y en fonction de x , soit $y = \varphi(x)$, ou x en fonction de y , soit $x = \psi(y)$, on se ramène à l'étude d'une seule variable :

$$h(x) = f(x, \varphi(x)) \text{ ou } h(y) = f(\psi(y), y).$$

On étudie alors les extrema de h suivant la méthode vue au lycée. On détermine les points critiques à l'aide de la condition nécessaire $h'(x) = 0$. Pour chacun de ces points x_0 , on peut soit étudier directement le signe de Δh ,

$$\Delta h = h(x) - h(x_0)$$

$$\text{ou } \Delta h = h(x_0 + h) - h(x_0)$$

soit utiliser les conditions suffisantes :

$$h''(x_0) > 0 \text{ implique minimum local en } x_0,$$

$$h''(x_0) < 0 \text{ implique maximum local en } x_0$$

Exemple

On cherche à optimiser $f(x, y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $x + y = 1$. Sous cette contrainte, la fonction f devient $h(x) = f(x, 1 - x) = 2x^2 - 2x + 1$.

La condition nécessaire donne un seul point critique $x = \frac{1}{2}$ comme $f''(\frac{1}{2}) = 4 > 0$, on en déduit que h admet un minimum en $x = \frac{1}{2}$. Et donc, f admet un minimum sous la

$$x + y = 1 \text{ au point } \left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Ce minimum est } f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Méthode de Lagrange



Lorsque la méthode de substitution n'est pas applicable, on utilise la méthode dite de Lagrange.

Pour λ appartenant à \mathbb{R} , on appellera **lagrangien** associé à f et g , la fonction :

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Le réel λ est appelé multiplicateur de Lagrange.

Théorème de Lagrange

Pour que f admette au point (x_0, y_0) de D en extremum local sous la contrainte $g(x, y) = 0$, il faut que :

- Le rang de la matrice jacobien $\left(\frac{\delta g}{\delta x}(x_0, y_0), \frac{\delta g}{\delta y}(x_0, y_0) \right)$ qui est le nombre de contrainte.
- Il existe un réel tel que (x_0, y_0, λ_0) soit un point critique de la fonction $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$

$$\text{ie } \begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta y}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \end{cases}$$

Exemple

$$f(x, y) = -y ; g(x, y) = y^3 - x^2$$

Appliquons le théorème de Lagrange, sous la condition (i), (condition de qualification de contrainte).

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = -y + \lambda (y^3 - x^2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta L}{\delta x} = -2\lambda x = 0 \quad (1) \\ \frac{\delta L}{\delta y} = -1 + 3\lambda y^2 = 0 \quad (2) \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda} = y^3 - x^2 = 0 \quad (3) \end{array} \right.$$

$$(1) \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } x = 0$$

Si $\lambda = 0$, l'équation (2) n'est pas satisfaite.

Si $x = 0$, (3) implique que $y = 0$, et (2) n'est pas satisfaite.

Cela signifie que la méthode de Lagrange ne mène pas à la solution du problème quand bien même cette solution existe.

En effet, on a :

$$f(x, y) = -y \text{ et } g(x, y) = y^3 - x^2$$

$g(x, y) = 0$, implique $y^3 = x^2$ d'où $y^3 \geq 0$ et donc $y \geq 0$; alors $f(x, y) = -y \leq 0$.

Alors $f(x, y)$ admet un maximum qui est 0, et qui atteint au point $(0; 0)$ de \mathbb{R}^2 .

La méthode de Lagrange a failli car la qualification de contrainte n'est pas vérifiée.

En effet,

$$\left[\frac{\delta g}{\delta x}(x, y); \frac{\delta g}{\delta y}(x, y) \right] = (-2x; 3y^2);$$

$$\left[\frac{\delta g}{\delta x}(0, 0); \frac{\delta g}{\delta y}(0, 0) \right] = (0; 0);$$

et

$$\text{rang} \left[\frac{\delta g}{\delta x}(0; 0); \frac{\delta g}{\delta y}(0; 0) \right] = \text{rang}(0; 0) = 0 \neq 1, \text{ qui est le nombre de contraintes.}$$

NB : Même si toutes les conditions de Lagrange sont satisfaites, cela n'est pas suffisant pour qu'il y ait un extremum.

Exemple

$$f(x, y) = x^3 + y^3 \text{ et } g(x, y) = x - y$$

Maximiser $f(x, y)$ sous contrainte $g(x, y) = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta L}{\delta x} = 3x^2 + \lambda = 0 \quad (1) \\ \frac{\delta L}{\delta y} = 3y^2 - \lambda = 0 \quad (2) \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda} = x - y = 0 \quad (3) \end{array} \right.$$

L'unique point critique de f est $(0, 0)$.

$$\left[\frac{\delta g}{\delta x}(x, y); \frac{\delta g}{\delta y}(x, y) \right] = (-1, 1) \quad \text{d'où} \quad \left[\frac{\delta g}{\delta x}(0, 0); \frac{\delta g}{\delta y}(0, 0) \right] = (0; 0) = (-1; 1)$$

Donc

$$\text{rang} \left[\frac{\delta g}{\delta x}(0, 0); \frac{\delta g}{\delta y}(0, 0) \right] = \text{rang}(1, -1) = 1 = (\text{nombre de contraintes}).$$

Toutes conditions de Lagrange sont vérifiées, mais f n'admet ni maximum, ni minimum en $(0, 0)$.

En effet, soit C l'ensemble des contraintes.

Si $0;$

$(;)$ C car $g(;) = 0$;

$(-; -)$ C car $g(-; -) = 0$;

$$f(;) =$$

$$3+3 = 2^3 \cdot 0 = f(0 ; 0)$$

Cela signifie que f n'admet pas de maximum en $(0 ; 0)$.

$$f(--)= -2 < 0 = f(0,0)$$

Morale : Le théorème de Lagrange n'est pas suffisant.

Conditions suffisantes d'optimalité

Lorsque le lagrangien est de classe C^2 , on appelle matrice hessienne de f , la matrice symétrique :

$$H(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L(x, y, \lambda)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L(x, y, \lambda)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda \partial x} \\ \frac{\partial^2 L(x, y, \lambda)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L(x, y, \lambda)}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda \partial y} \\ \frac{\partial^2 L(x, y, \lambda)}{\partial x \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L(x, y, \lambda)}{\partial y \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda^2} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice hessienne H est appelé hessien

Remarque

Une fois de plus, ces conditions ne sont pas nécessaires. Elles permettent de déterminer les points candidats.

Mais on est pas assuré que la fonction f admette effectivement un extremum en chacun de ces points.

Pour conclure, on peut essayer de déterminer le signe Δf en chacun des points vérifiant les conditions (1), en tenant contrainte $g(x,y)=0$, ou

utiliser les conditions suffisantes ci-après

Théorème

Soit (x_0, y_0) un point vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité avec le multiplicateur λ_0 et $D = \det H(x_0, y_0, \lambda_0)$ la valeur du hessien en ce point.

Alors :

- Si $D < 0$, la fonction f admet en (x_0, y_0) un minimum local sous la contrainte $g(x,y)=0$
- Si $D = 0$, on ne peut rien conclure (on ne peut rien dire). Il faut étudier directement le signe de Δf en tenant compte de $g(x,y)=0$

Exemple

On cherche à optimiser la fonction $f(x,y)=xy$ sous la contrainte $y-2x=4$

$$\text{Or, } y-2x=4 \Leftrightarrow y-2x-4=0$$

La fonction contrainte est $g(x; y) = y - 2x - 4 = 0$

Le Lagrangien associé est $L(x; y) = xy + \lambda(y - 2x - 4)$

Les conditions nécessaires d'optimalité sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = y - 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = x + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = y - 2x - 4 = 0 \end{cases}$$

Des deux premières équations, on tire $y = 2\lambda$ et $x = -\lambda$

En remplaçant dans la troisième équation, on trouve $\lambda = 1$.

Donc seule le point $(1; 2)$ vérifie les conditions nécessaires d'optimalité.

On calcule alors le hessien de f au point $(-1, 2, 1)$:

$$H(-1, 2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det H(-1, 2, 1) = -4$$

Comme $D = \det H(-1; 2; 1)$ est strictement négatif, la fonction f admet en $(-1; 2)$ un minimum local sous contrainte $y-2x = 0$. Ce point vaut $f(-1; 2) = -2$.

Exemple

On considère le problème d'optimisation

$$(p) \begin{cases} \text{Optimiser} & f(x, y) = x^2y + 2x^2 - 2x - y + 1 \\ \text{Sous la contrainte} & x - y = 1 \end{cases}$$

Déterminer les solutions de ce problème :

1. Par la méthode du Lagrangien,
2. Par substitution.

Solution

Le Lagrangien associé au problème (p) est :

$$L(x, y, \lambda) = x^2y + x^2 - 2x - y + 1 + \lambda(x - y - 1)$$

Les conditions nécessaires d'optimalité sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = 2xy + 2x - 2 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = x^2 - 1 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Des deux dernières équations, on tire $y = x-1$ et $\lambda = x^2 - 1$. En remplaçant dans la première équation, on obtient $x^2 = 1$

On obtient donc deux points candidats : $(-1, -2)$ et $(1, 0)$ avec dans les deux cas $\lambda = 0$

On étudie alors les conditions suivantes :

$$H = \begin{pmatrix} 2y + 2 & 2x & 1 \\ 2x & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det H = -4x - 2y - 2$$

En $(-1; -2)$; on a $D = \det H(-1; -2) = 6 > 0$: La fonction f admet donc en

$(-1; -2)$ un maximum local sous la contrainte et ce maximum vaut $f(-1; -2) = 4$.

En $(1; 0)$, $\det H(1; 0) = -6 < 0$: La fonction f admet donc en $(1; 0)$ un minimum local sous la contrainte et ce minimum vaut $f(1; 0) = 0$:

Le cas convexe/ concave

Si (x_0, y_0) vérifie les conditions nécessaires d'optimalité avec $\lambda = \lambda_0$ et si

le Lagrangien $L(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda g(x; y)$ est convexe (resp. concave), alors la fonction f admet en (x_0, y_0) un minimum global (resp. maximum global) sous la contrainte $g(x; y) = 0$.

Il n'est donc pas nécessaire d'étudier les conditions suffisantes.

Remarque

Si f est convexe (resp. concave) et g est affine, alors $L(x; y, \lambda) = f(x; y) + \lambda g(x; y)$

est convexe (resp. concave) pour tout λ .

Optimisation sous la contrainte d'une fonction de n variables



Soit f et g deux fonctions de classe C^1 sur un ouvert D de \mathbb{R}^n . Si f admet en (x_1^0, \dots, x_n^0) un extremum local sous la contrainte $g(x; y) = 0$, on a :

$$\frac{\partial L(x_1^0, \dots, x_n^0, \lambda)}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L(x_1^0, \dots, x_n^0, \lambda)}{\partial x_n} = \frac{\partial L(x_1^0, \dots, x_n^0, \lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

On obtient ainsi des points candidats. On étudie ensuite leur nature (minimum ou maximum, local ou global) en étudiant le signe de Δf :

$$\Delta f = f(x_1^0 + h_1, \dots, x_n^0 + h_n)$$

En tenant compte de la contrainte $g(x_1^0, \dots, x_n^0, \lambda) = 0$.

Optimisation sous plusieurs contraintes



Lorsque les variables x_1, \dots, x_n sont soumises à plusieurs contraintes

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_p(x_1, \dots, x_n) = 0$$

On définit le Lagrangien par $L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_p) = f(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_p) + \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_p)$

Les conditions nécessaires d'optimalité sont alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_p} = 0 \end{array} \right.$$