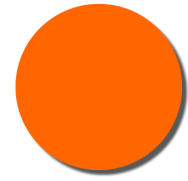


Leçon 3 : Lois de Probabilités discrètes usuelles

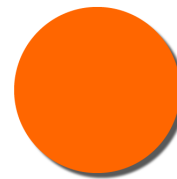
SOW Tierno

Table des matières



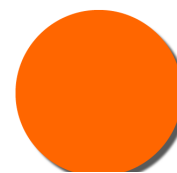
Objectifs	3
Introduction	4
I - Loi de Bernoulli	5
II - Loi Binomiale	6
III - Loi Hypergéométrique	7
IV - Loi géométrique	8
V - Loi de Poisson	10

Objectifs



- Savoir identifier la variable et la loi de probabilité théorique à appliquer à un problème ou une situation réelle.

Introduction



Pour chacune des lois suivantes, le schéma est le suivant :

Le modèle ; la définition mathématique ; les paramètres caractéristiques ; la notation « conventionnelle » ; et l'application à des situations réelles.

Loi de Bernoulli



Modèle

On effectue un tirage dans une urne contenant deux catégories de boules, des blanches en proportion p ($0 < p < 1$), et des noires en proportion q ($p+q=1$). Soit X le nombre de boules blanches :

Définition

$X \in \{0, 1\}$ et $P(X = x) = p^x q^{1-x}$ Ainsi $P(X=1)=p$, et $P(X=0)=1-p=q$

Paramètres

$E(X) = p$, $V(X) = pq$ et $\sigma = \sqrt{pq}$ $m_k = p$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ plus généralement tout moment simple d'ordre k est : $m_k(X) = E(X^k) = p \quad \forall k$ lorsque X suit $B(1; p)$

Notation

$X \rightarrow B(1, p)$. X est une variable aléatoire de Bernoulli

Application

Soit une épreuve donnant lieu à deux issues : un succès ou un échec. Une telle épreuve est appelée épreuve de Bernoulli ; soit p la probabilité du succès : $p=P(\text{succès})$, et par conséquent

$P(\text{échec})=1-p=q$. la v.a. X , associée à cette épreuve est : $X = \begin{cases} 1 & \text{si on a un succès} \\ 0 & \text{si on a un échec} \end{cases}$

Exemple

Lors d'une élection, la liste électorale comprend deux fois plus d'hommes que femmes. On tire un électeur au hasard. Soit X le nombre de femmes obtenu. Donner la loi de X , $E(X)$ et l'écart type de X

Solution. L'épreuve est le tirage d'un électeur, c'est une épreuve de Bernoulli où le succès est « obtenir une femme » ; on a : $X=1$ si on a une femme et $X=0$ si c'est un homme .avec

$P=P(X=1)=1/3$ et $q=P(X=0)=2/3$.

On note : $X \rightarrow B(1; 1/3)$ et $E(X)=p=1/3$; $V(X)=p.q=(1/3).(2/3)=2/9$;

$$\sigma = \sqrt{2/9} = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0,4714$$

Loi Binomiale



Modèle

On effectue n tirages *avec remise* dans une urne contenant deux catégories de boules, des boules blanches en proportion p ($0 < p < 1$), et des boules noires en proportion q ($p+q=1$). Soit X le nombre de boules blanches tirées.

Définition

$X \in \{0, 1, 2, \dots, k, \dots, n\}$ et $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$

Paramètres

$E(X) = np$; $V(X) = npq$; et $\sigma = \sqrt{npq}$

Notation

$X \rightarrow B(n, p)$

Application

Soit une épreuve de Bernoulli avec $p=P(\text{Succès})$. Cette épreuve est répétée n fois de façon indépendante. Soit X le nombre de succès obtenus au cours des n épreuves.

On a : $X \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$ et $X \rightarrow B(n; p)$

Exemple

Un joueur a une chance sur trois de gagner une partie. Il joue cinq parties. Calculer la probabilité pour qu'il gagne :

1. trois parties;
2. cinq parties;
3. au plus une partie;
4. au moins deux parties

Correction : Ici l'épreuve est « jouer une partie » ; c'est une épreuve de Bernoulli. Le succès est « gagner une partie. Et $p=P(\text{Succès})=1/3$; $q=P(\text{Echec})$. Soit X le nombre de succès.

$X \rightarrow B(5; 1/3)$. $X \in \{0; 1; 2; \dots; 5\}$

1 $P(X = 3) = C_5^3 (1/3)^3 (2/3)^2 = 0,1646$

2 $P(X = 5) = C_5^5 (1/3)^5 (2/3)^0 = 0,0041$

3 $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,4609$

4 $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0,4609 = 0,5391$

Loi Hypergéométrique



Modèle

On effectue n tirages sans remise dans une urne contenant deux catégories de boules, N_1 ($N_1 \neq 0$) boules blanches et N_2 ($N_2 \neq 0$) boules noires ($N = N_1 + N_2$). Soit X le nombre de boules blanches tirées.

Définition

$$X \in [\max(0, n - N_2), \dots, \min(n, N_1)] \cap \mathbb{N} \quad \text{et} \quad P(X = x) = \frac{C_{N_1}^x C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$$

Paramètres

$$E(X) = np = n \frac{N_1}{N}; \text{ où } p = \frac{N_1}{N}; V(X) = \frac{N-n}{N-1} npq \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{\frac{N-n}{N-1} npq}$$

$\frac{N-n}{N-1}$ est appelé *facteur d'exhaustivité*.

Notation

$$X \rightarrow H(N, n, p)$$

Remarque

La loi hypergéométrique $H(N, n, p)$ peut être "approchée" ou approximée par la loi Binomiale $B(n, p)$ lorsque $N_1 \rightarrow +\infty$, $N_2 \rightarrow +\infty$, $\frac{N_1}{N}$ et $\frac{N_2}{N}$ restants finis.

En pratique, l'approximation peut se faire lorsque $\frac{n}{N} < 0,05 \Leftrightarrow n < 0,05N$

Loi géométrique



Modèle

On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant deux catégories de boules, des blanches en proportion p ($0 < p < 1$) et des noires en proportion q . Soit X le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche.

Notation

$X \rightarrow R(1, p)$

Définition

$X \in \{1, 2, 3, \dots, k, \dots\}$ et $P(X = k) = pq^{k-1} \quad \forall k$

Paramètres

$$E(X) = \frac{1}{p} ; V(X) = \frac{q}{p^2} \Rightarrow \sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

Application

Soit une épreuve de Bernoulli avec $p = P(\text{Succès})$. Cette épreuve est répétée de façon indépendante jusqu'à obtenir le premier succès. Soit X le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir ce succès. On a : $X \in \{0; 1; 2; \dots; n; \dots\}$

Exemple

Victime d'une plaisanterie, Jean - Pierre se retrouve perdu dans un labyrinthe à 10 portes dont une seule peut le sauver. Soit X le nombre d'essais pour trouver la bonne porte.

1. On suppose que le labyrinthe est éclairé et que Jean - Pierre peut reconnaître toute porte déjà essayée. Quelles sont les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$?
2. On suppose que le labyrinthe n'est pas éclairé et que Jean - Pierre n'est pas en mesure de reconnaître une porte déjà essayée. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Solution

Soit X le nombre d'essais lorsque le labyrinthe est éclairé. L'essai d'une porte se fait "sans remise", et $X \in \{1, 2, \dots, 10\}$. On obtient :

$$P(X = 1) = \frac{1}{10} ; P(X = 2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{10} ; \dots ; P(X = 10) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{11}{21} = \frac{1}{10}$$

X suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, 10\}$

$E(X) = 5,5$; $E(X^2) = 38,5$, et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 8,25$.

Le labyrinthe n'est pas éclairé, les essais se font "avec remise".

Loi géométrique

$X \in \{1, 2, \dots, 10, \dots\}$; soit p la probabilité de trouver, à chaque essai, la bonne porte :
 $p = \frac{1}{10}$. On a alors : $P(X = k) = q^{k-1}p$, avec $p + q = 1$. X suit une loi géométrique de paramètre p .

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k p q^{k-1} = p \left(\sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} \right) = p \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} = 10$$
$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(X = k) = p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} (k-1 + k) k^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) k^{k-1} + p \sum_{k=1}^{\infty} k^k =$$
$$= p \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) k^{k-1} + p E(X) = p \left(\frac{2}{(1-q)^2} \right) + p \frac{1}{p} = \frac{2q}{(1-q)^2} + \frac{1}{p} = \frac{2 \cdot \frac{9}{10}}{\left(\frac{1}{10}\right)^2} + 10 = 190$$
$$\Rightarrow V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 190 - 100 = 90 = \frac{90}{p^2}$$

Loi de Poisson



Définition

$$X \in \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \text{ et } P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad \forall x \in \mathbb{N}, \text{ avec } \lambda > 0$$

Paramètres

$$E(X) = V(X) = \lambda \Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

Notation

$$X \rightarrow P(\lambda)$$

Remarque

La loi binomiale $B(n, p)$ peut être approchée par la loi de Poisson $P(\lambda)$ avec $\lambda = np$, lorsque $n \rightarrow +\infty$, $p \rightarrow 0$ et np restant constant.

Dans la pratique, l'approximation peut se faire lorsque $n > 50$ et $p < 0,1$.

La loi de Poisson est utilisée lorsque l'étude statistique porte sur un phénomène « rare ». Le domaine d'application privilégié est celui des files d'attente (les guichets de banque ; PTT, de supermarchés, les gares, les stations de bus, les standards de téléphone etc...).

Exemple

Une urne contient des boules blanches et des boules noires dans les proportions $2/3$ de blanches et $1/3$ de noires.

On tire une boule. Si la boule tirée est blanche, le jeu est terminé. Si elle est noire, on la remet dans l'urne et on procède à un nouveau tirage. Et ainsi de suite.

Le nombre de tirages pour voir le jeu se terminer est une variable aléatoire X .

1. Donner la loi de probabilité de X . Vérifier que la somme des probabilités est égale à 1.
2. Déterminer la probabilité que : $X > 3$; $X \leq 5$; $4 < X < 6$
3. Calculer l'espérance mathématique de X .

Solution

Soit $B =$ " la boule tirée est blanche"; et $N =$ " la boule tirée est noire".

- Loi de X - $P(B) = 2/3$, et $P(N) = 1/3$.
 X est le nombre de tirages; c'est une variable dénombrable : $X \in \mathbb{N}^*$ Les tirages se font avec remise; les résultats successifs des tirages sont donc indépendants.

$$P(X = 1) = P(B) = 2/3$$


$$P(X = 2) = P(N \cap B) = P(N) \cdot P(B) = (1/3) \cdot (2/3) = 2/9;$$

$$P(X = 3) = P(N \cap N \cap B) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}$$

On démontre, par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ que La loi de X est une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{3}$. Par la suite on a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(X = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} \right) = 1$$

$P(X=1) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - (P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)) = 1 - \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) = 0,037$
 $P(X \leq 5) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}\right) = 0,996$
 $P(4 < X < 6) = P(X=5) = 0,008$
 Calcul de l'espérance mathématique de X. On pose $\frac{1}{3} = q$
 $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{3} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{2}{3}\right)^k \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{\frac{2}{3}}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{1} + \frac{2}{\frac{1}{9}} \right) = \frac{2}{3} \left(3 + 18 \right) = \frac{2}{3} \cdot 21 = 14$
 Et on vérifie que : $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

 **Exemple**

Un agent d'assurances vend des polices d'assurance-vie à 5 personnes toutes de même âge et toutes en bonne santé. En se reportant aux tables des actuaires, on se rend compte que la probabilité pour qu'une personne de cet âge vive encore 30 ans est de 2/3. Déterminer la probabilité qu'au bout de 30 ans,

1. les 5 personnes soient vivantes;
2. au moins trois personnes soient vivantes;
3. deux personnes seulement soient vivantes.

Solution

Soit X le nombre de personnes vivantes après 30 ans. X suit une loi Binomiale B(5; 2/3).

1. Probabilité que les 5 personnes soient vivantes.

$$P(X=5) = C_5^5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 0,1317$$

2. Probabilité qu'au moins 3 personnes soient vivantes

$$P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = C_5^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + C_5^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + C_5^5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 0,3292 + 0,3292 + 0,1317 = 0,7901$$

3. Probabilité que deux seulement soient vivantes

$$P(X=2) = C_5^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 0,1646$$